

Infos: cours de mercredi remplacé par une vidéo

⇒ Évaluation du cours sur is-academy. Deadline: dimanche

⇒ Série 5: Exercice à rendre au cours de lundi prochain

Une suite $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{R}$ est une fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Def 3.3

(vi) (x_n) est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n, x_n \leq M$

(vii) (x_n) est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tq $\forall n, x_n \geq m$

(viii) (x_n) est bornée si elle est minorée & majorée

Proposition 3.6 : Caractérisation des séries bornées.

Une série $(x_n)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si $\exists c \geq 0$ tq
 $\forall n \geq 0, |x_n| \leq c$.

Preuve:

" $\Rightarrow$ " : Supposons :

$\exists m \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \geq 0, x_n \geq m$

$\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \geq 0, x_n \leq M$.

Soit $m \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$ comme ci-dessus.

Posons $c = \max \{ |m|, |M| \} \geq 0$. Soit $n \geq 0$ quelconque.

On a $c \geq |m| = |-m| \geq -m$. Et donc $-c \leq m$. (1)

De plus, $c \geq |M| \geq M$ (2)

Ainsi,

$$-c \stackrel{(1)}{\leq} m \leq x_n \leq M \stackrel{(2)}{\leq} c$$

Ainsi, par la proposition 1.3(ii) ($|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$) on a $|x_n| \leq c$. n étant quelconque, on a le résultat.

" $\Leftarrow$ ": Supposons $\exists c \geq 0$ tq $\forall n \geq 0, |x_n| \leq c$ et montrons

$\exists m \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \geq 0, x_n \geq m$

$\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \geq 0, x_n \leq M$

Soit $c \geq 0$ comme ci-dessus. Posons $m = -c, M = c \in \mathbb{R}$.

Soit $n \geq 0$ quelconque.

Ver que $|x_n| \leq c, -c \leq x_n \leq c$ et on a

$m = -c \leq x_n \leq c = M$.

n étant quelconque, on a le résultat. □

Exemple 3.7: (i) Soit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

On a $|x_n| = \frac{|(-1)^n|}{|1+\sqrt{n}|} = \frac{1}{1+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{1} = 1$. Ainsi, si $c = 1$, on a

$\forall n \geq 0, |x_n| \leq C$ et (x_n) est bornée.

(?) Soit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_n = (-1)^n \cdot n$.
Montrons que (x_n) n'est pas bornée.

$$\neg(\exists c \geq 0 \text{ tq } \forall n \geq 0, |x_n| \leq c) = \forall c \geq 0, \exists n \geq 0 \text{ tq } |x_n| > c.$$

Soit $c \geq 0$ quelconque. Posons $n = \lceil c \rceil + 1$. Alors,

$$|x_n| = |(-1)^n \cdot n| = n = \lceil c \rceil + 1 \geq c + 1 > c.$$

c étant quelconque, on a le résultat.

§ 3.2 Limites de suites

Définition 3.8 (limite, suite convergente)

(i) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite et $l \in \mathbb{R}$. On dit que l est la limite de
 (x_n) ou que (x_n) converge vers l , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$$

On note alors $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

(ii) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite. On dit que (x_n) converge ou est convergente si $\exists l \in \mathbb{R}$ tq $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, i.e.
 $\exists l \in \mathbb{R}$ tq $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$.

Exemples:

(ii) Soit $x_n = \frac{1}{n^2}$ pour $n \geq 1$.

Détermination du résultat: $l = 0$.

RdP Partir de $|x_n - l| \leq \varepsilon$ et résoudre pour n :

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq n, \text{ dans la démo:}$$

$$N = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil \leftarrow$$

Preuve: Posons $l = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $N = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$.

Soit $n \geq N$ quelconque.

$$|x_n - l| = \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} \stackrel{n \geq N}{\leq} \frac{1}{N^2} = \frac{1}{\left(\left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil \right)^2} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^2} = \varepsilon. \quad n \text{ étant quelconque, on a le résultat.}$$

(iii) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $x_n = x$ pour $n \geq 0$.

DdR: $l = x$

RdP: $|x_n - l| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x - x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq \varepsilon$ toujours vrai $\Rightarrow N = 0$

Preuve: Posons $l = x$, Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $N = 0$, soit $n \geq N$ quelconque. Alors,

$|x_n - l| = |x - x| = 0 \leq \varepsilon$. n étant quelconque, on a le résultat.

(iv) Soit $0 < \alpha < 1$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite géométrique définie par

$$x_n = \alpha^n$$

DdR: $l = 0$

RdP: $|x_n - l| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha^n - 0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \alpha^n \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \log(\alpha) \leq \log(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \log(\alpha) < 0 \\ \Leftrightarrow n \geq \frac{\log(\varepsilon)}{\log(\alpha)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N = \left\lceil \frac{\log(\varepsilon)}{\log(\alpha)} \right\rceil$$

Qu: est-ce positif? si $\varepsilon > 1$, non.

$$\text{Si } \varepsilon > 1, N = 0, \text{ si } 0 < \varepsilon \leq 1, N = \left\lceil \frac{\log(\varepsilon)}{\log(\alpha)} \right\rceil$$

Preuve: Posons $l=0$, soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Distinguons 2 cas:

Cas 1: $\varepsilon > 1$: Posons $N=0$, soit $n \geq N$ quelconque. Alors,

$$|x_n - l| = |\alpha^n - 0| = \alpha^n \leq 1^n = 1 < \varepsilon. \quad n \text{ étant quelconque, on a le résultat dans ce cas.}$$

Cas 2: $0 < \varepsilon \leq 1$. Posons $N = \left\lceil \frac{\log(\varepsilon)}{\log(\alpha)} \right\rceil$. Soit $n \geq N$ quelconque. Alors,

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= |\alpha^n - 0| = \alpha^n = e^{n \cdot \log(\alpha)} \leq e^{N \cdot \log(\alpha)} = e^{\left\lceil \frac{\log(\varepsilon)}{\log(\alpha)} \right\rceil \cdot \log(\alpha)} \\ &\leq e^{\frac{\log(\varepsilon)}{\log(\alpha)} \cdot \log(\alpha)} = e^{\log(\varepsilon)} = \varepsilon. \quad n \text{ étant quelconque, on a le résultat} \end{aligned}$$

Proposition 3.10

Si une suite converge, la limite est unique.

Proposition 3.11

Une suite convergente est bornée.

Preuve: Supposons que $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tq $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N,$
 $|x_n - \ell| \leq \varepsilon.$

Montrons: $\exists c \geq 0$ tq $\forall n \geq 0, |x_n| \leq c.$

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ comme ci-dessus. Posons $\varepsilon = 7$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tq
 $\forall n \geq N, |x_n - \ell| \leq 7.$

Posons $c = \max \{ |x_0|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, |\ell| + 7 \} \geq 0$
Soit $n \geq 0$ quelconque.

Cas 1: $0 \leq n < N$. $\Leftrightarrow 0 \leq n \leq N-1$.

$$|x_n| \in \{ |x_0|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, |\ell| + 7 \}$$

$\Rightarrow |x_n| \leq \max \{ |x_0|, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|, |\ell| + 7 \} = c$, ce qui montre le résultat dans ce cas.

Cas 2: $n \geq N$.
inégalité du Δ

trainte du loop: $x = x - y + y$

$$|x_n| = |x_n - \ell + \ell| \stackrel{\downarrow}{\leq} \underbrace{|x_n - \ell|}_{\leq 7 \text{ car } n \geq N} + |\ell| \leq |\ell| + 7 \leq \max \{ |x_0|, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|, |\ell| + 7 \} = c$$

ceci montre le résultat dans ce cas.

Dans tous les cas, on a le résultat. ■

Définition 3.12: Suite divergente

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite. On dit que (x_n) diverge ou est divergente si elle ne converge pas, i.e.

$\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0$ tq $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$ tq $|x_n - l| > \varepsilon$.